CONCOURS D'ENTRÉE 1987

DEUXIÈME ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES

OPTION BIOLOGIE-MATHEMATIQUES DURÉE: 3 HEURES

Question préliminaire

Soient x et t deux réels liés par la relation : $x = \operatorname{ch} t$.
En utilisant la définition de la fonction ch, calculer t en fonction de x à l'aide des fonctions usuelles.
Le but du problème est l'étude de l'équation différentielle :

$$(E) \qquad (1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - x\frac{dy}{dx} + k^2y = 0$$

où y désigne la fonction inconnue de la variable réelle x et où k désigne une constante réelle positive ou nulle.
Si I est un intervalle de R, on appelle solution de (E) sur I toute fonction de classe C^2 sur I vérifiant (E).

I

On suppose dans cette partie que : $k = 0$.

1. Donner les solutions de (E) sur $]-1,+1[$.

2. a. Montrer qu'il existe une solution unique f_1 sur $]-1,+1[$ telle que $f_1(0) = 0$ et $f'_1(0) = 1$.

   b. Etudier les variations de f_1 et construire son graphe.

3. Donner les solutions de (E) sur $]1,+\infty[$.

4. Montrer qu'il existe une solution de (E) sur $]1,+\infty[$, que l'on notera f_2, telle que $\lim_{x\to 1^+} f_2(x) = \lim_{x\to 1^-} f_1(x)$ (on notera ℓ cette limite).

5. La fonction g définie par
   $g(x) = f_1(x)$ pour $x \in]-1,1[$
   $g(1) = \ell$
   $g(x) = f_2(x)$ pour $x \in]1,+\infty[$
   est-elle une solution de (E) sur $]-1,+\infty[$?

Tournez la page S. V. P.

II

On suppose désormais que : k > 0

On suppose dans cette partie que $|x| < 1$.

1. Montrer que l'on peut faire dans (E) le changement de variable défini par

$$x = \sin t \qquad t \in \left]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right[$$

2. En déduire les solutions de (E) sur $]-1,+1[$.

3. Préciser ces solutions lorsque k = 1.

III

On suppose dans cette partie que $|x| > 1$.

1. a. Définir et utiliser un changement de variable adapté pour trouver les solutions de (E) sur $]1,+\infty[$.

   b. Procéder de manière analogue pour trouver les solutions de (E) sur $]-\infty,-1[$.

2. Etudier le cas : $k = 1$.

IV

On cherche dans cette partie les séries entières de la variable réelle x dont la somme est solution de (E).

1. Ecrire la condition à laquelle doit satisfaire la suite (a_n) pour que la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ soit solution de (E).

2. La suite (a_n) vérifiant cette condition, on pose

$$S = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} x^{2n} \qquad \text{et} \qquad T = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

   a. Donner les rayons de convergence de S et T.

   b. En déduire un intervalle I sur lequel la somme de la série entière $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est solution de (E).

3. Donner le développement en série entière de la fonction :
$x \longmapsto \sqrt{1+\sqrt{1-x^2}}$ et préciser le rayon de convergence. (On pourra poser $x = \sin t$).

4. On suppose $a_0 = 1$ et on étudie S (On note R_1 son rayon de convergence).

   a. Montrer qu'il existe un entier naturel N tel que, pour tout $n > N$, on a:

$$\begin{cases} a_{2n} \text{ de signe constant} \\ \dfrac{a_{2n}}{a_{2n+2}} > 1+\dfrac{3}{2n} \end{cases}$$

   b. Etudier les variations de la fonction :

$$\varphi : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$t \longmapsto 1+\frac{3t}{2} - (1+t)^{\frac{5}{4}}$$

   c. En déduire la nature de la série S pour $|x| = R_1$.

V

On suppose toujours $a_0 = 1$ et on considère la série entière de la variable complexe z définie par

$$U = \sum_{n=0}^{+\infty} a_{2n} z^{2n}$$

1. Donner son rayon de convergence R.

2. Préciser la situation pour $|z| = R$.
